1 L'Alternatore

L'alternatore, il cui funzionamento è spiegato dalla Legge di Faraday-Neumann-Lenz, è un generatore di tensione variabile secondo andamento sinusoidale; la corrente che scorre attraverso un circuito alimentato da un alternatore è detta **corrente alternata**, in contrapposizione alla corrente continua prodotta da generatori come batterie.

La legge di Faraday può essere scritta come:

$$f_{em} = -N\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t}$$

Da qui ricaviamo i due più importanti parametri di un alternatore:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = \frac{d}{dt}(\vec{B}\cdot\vec{S}) = \frac{d}{dt}(BS\cos\alpha) = \\ = BS\frac{d}{dt}\cos\alpha = \\ = BS\frac{d}{dt}\cos\omega t = -BS\omega\sin\omega t \end{aligned}$$

$$fem = -N\frac{\Delta\Phi(B)}{\Delta t} = (N)BS\omega \cdot sin\omega t$$

$$(N)BS\omega = V_0 \text{ tensione di picco}$$

$$fem = V_0 \cdot \sin\omega t$$

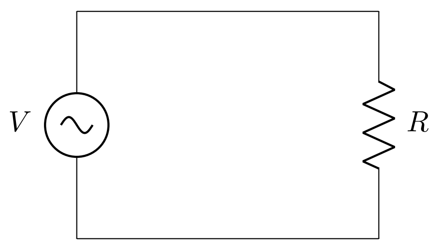
Dalla legge di Ohm si deduce:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\sin\omega t$$

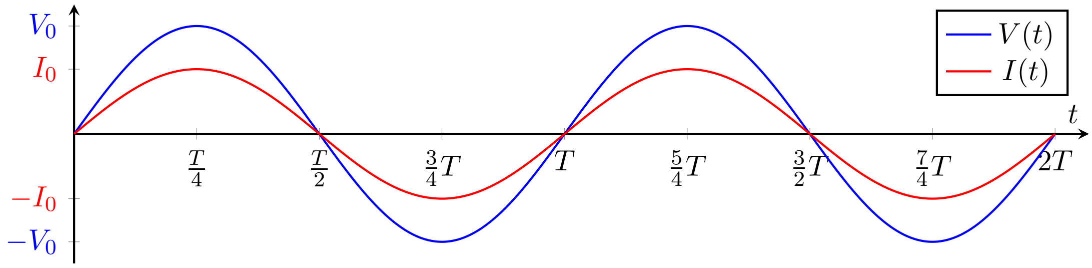
$$\frac{V_0}{R} = I_0 \text{ corrente di picco}$$

2 Circuito puramente resistivo

Considero un circuito puramente resistivo: in esso sono presenti esclusivamente un alternatore e un resistore in serie:



V, I sono *in fase* (i due andamenti hanno punti di massimo e minimo coincidenti):

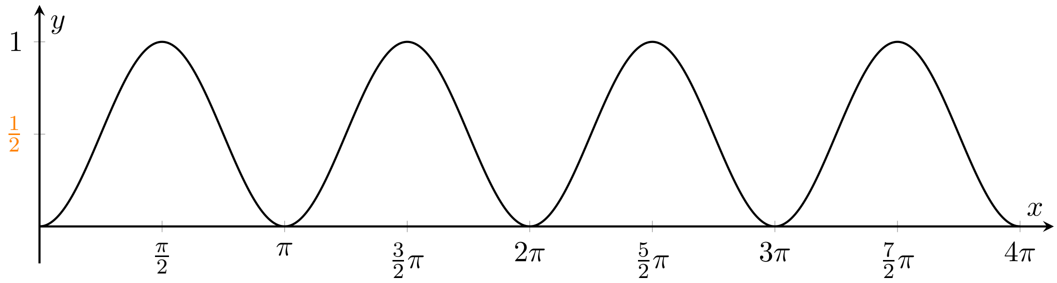


Trovo allora i valori medi della corrente e della tensione, per determinare la potenza media $\overline{P}$. Apparentemente $\overline{I} = \overline{V} = 0$, ma la potenza media non può essere zero!
Per la Prima Legge di Joule, $\overline{P} = RI^2$, pertanto:

$$I^2 = I_0^2 \sin^2 \omega t \quad (A)$$

Poiché

$$y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$



$$\overline{y} = \overline{\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overline{\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

La (A) può essere ricondotta a:

$$I^2 = I_0^2 \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} \quad \rightarrow \quad \overline{I^2} = \frac{1}{2} I_0^2$$

La corrente media $\overline{I^2}$ è $\frac{1}{2}$ del quadrato della corrente di picco (I_0^2).

Per fare un'analogia tra un circuito puramente resistivo attraversato da corrente alternata e uno attraversato da corrente continua, assumendo una pari resistenza R e un comportamento conforme alla Prima Legge di Joule, posso allora definire una corrente *efficace* (I_{eff}) tale che:

$$I_{eff}^2 = \frac{I_0^2}{2}$$

Allora avrò:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = I_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 71\% \ I_0$$

3 Circuito puramente capacitivo

Ricordo le proprietà di un condensatore:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$
$$E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$
$$w_{\vec{E}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$I = C \, \frac{dV}{dt}$$

In un circuito RC, ho che:

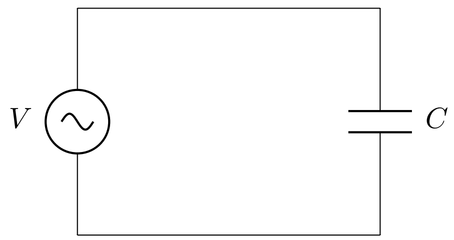
Carica:

$$q(t) = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$
$$\tau = RC \ (Costante \ di \ tempo)$$

Scarica:

$$q(t) = CVe^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = -\frac{V}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

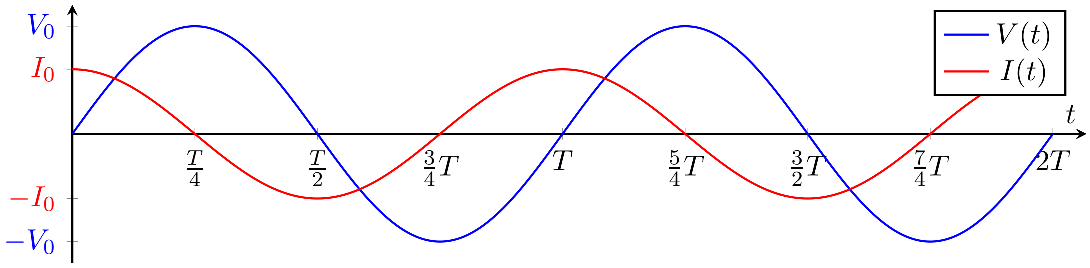
Considero ora un circuito puramente capacitivo, con un alternatore e un condensatore:



Nel circuito avrò:

$$V = V_0 \sin \omega t$$
$$q(t) = C \cdot V_0 \sin \omega t$$
$$i(t) = CV_0 \, \omega \cos \omega t = CV_0 \, \omega \sin (\omega t - \varphi) = CV_0 \, \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Osservo che corrente e tensione non sono in fase: la corrente è in anticipo rispetto alla tensione (la tensione è in ritardo rispetto alla corrente).



$i(t) = C\omega \; V_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow$ reattanza capacitiva
L'unità di misura di questa grandezza è:

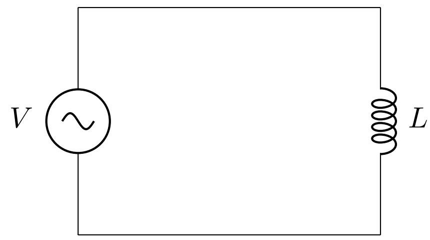
$$\frac{1}{\frac{rad}{s} \cdot \frac{C}{V}} = \frac{1}{\frac{A}{V}} = \frac{V}{A} = \Omega$$

La reattanza capacitiva ha unità di misura **ohm**, come la resistenza elettrica.
Si può dimostrare che:

$$V_{eff} = X_C \cdot I_{eff}$$

Nell'arco di un periodo, nel circuito puramente capacitivo avvengono due processi di carica e due processi di scarica del condensatore.

4 Circuito puramente induttivo



$$V - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$V = V_0 \sin \omega t$$

$$i' = \frac{di}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

Ricostruisco la funzione i di cui i' è derivata rispetto a t (ossia integro i' rispetto a t):

$$i(t) = \int i'(t)\, dt = -\frac{V_0}{L}\frac{1}{\omega} \cos \omega t$$

Individuo ωL come **reattanza induttiva** X_L:

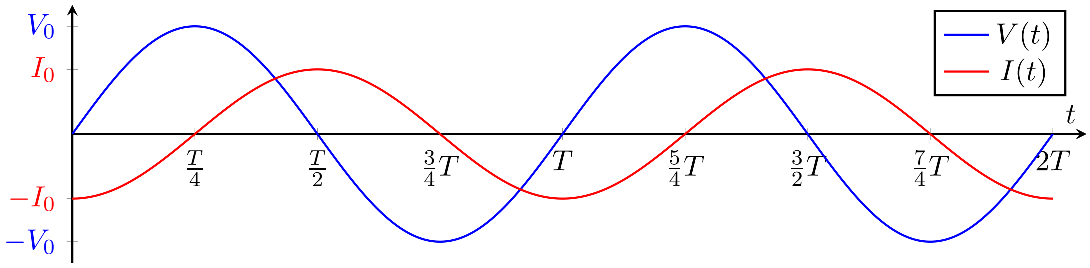
$$\omega L = X_L$$

$$i(t) = -\frac{V_0}{X_L}\cos\omega t$$

$$V_{eff} = X_L \cdot I_{eff}$$

Osservo che X_L è direttamente proporzionale alla frequenza:

$$X_L = 2\pi f$$



$$i(t) = -\frac{V}{\omega L}\cos\omega t = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \varphi\right) = 0\frac{V}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La corrente è in ritardo di $\frac{T}{4}$ rispetto alla tensione.

$$V_{eff} = X_L \cdot I_{eff}$$

dove:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

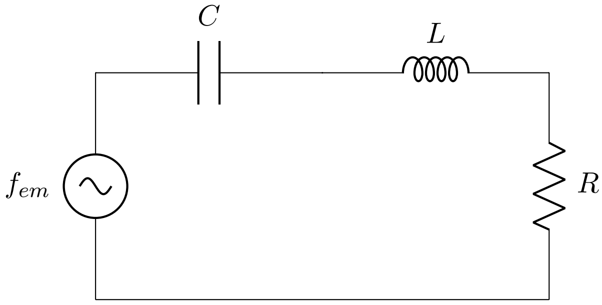
Pertanto, a parità di tensione, muovendo una barretta ferromagnetica dentro il (e fuori dal) solenoide, si regola il valore dell'induttanza e di conseguenza il valore della corrente. Questo è il meccanismo di funzionamento delle manopole dei light dimmer.

Analogamente a quanto accade per il condensatore, l'energia immagazzinata nell'induttore può essere espressa come:

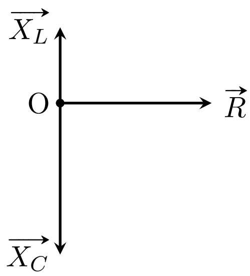
$$E = \frac{1}{2}LI^2$$

5 Circuito RLC

Abbiamo in serie un generatore, un resistore, un induttore e un condensatore



In fisica il **fasore** è una grandezza che assume connotazione vettoriale pur non essendolo intrinsecamente. Un esempio che già abbiamo incontrato è $\vec{S}$, il vettore superficie. Possiamo descrivere come fasore anche la resistenza ($\vec{R}$), nonché la reattanza induttiva ($\overrightarrow{X_L}$) e capacitiva ($\overrightarrow{X_C}$):



La "resistenza" risultante dalla somma vettoriale dei fasori $\overrightarrow{X_R}$, $\overrightarrow{X_L}$ e $\overrightarrow{X_C}$, è pari a

$$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$$

La grandezza costituita dal modulo Z del vettore risultante dalla somma dei tre vettori è l'**impedenza**, e ha come unità di misura l'ohm (Ω); vale sempre la legge:

$$V_{eff} = Z \cdot I_{eff}$$

Osserviamo che la tangente dell'angolo φ, sfasamento tra $\vec{Z}$ e $\overrightarrow{X_R}$ (i circuiti solo R hanno $\varphi = 0$) è pari a:

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

La tangente di φ è positiva quando nell'impedenza l'elemento non resistivo maggiore è di tipo induttivo.
Se $\tan\varphi > 0\ :\ X_L > X_C$
Se $\tan\varphi < 0\ :\ X_C > X_L$
Se $\tan\varphi = 0\ :\ X_L = X_C \rightarrow$ siamo nella condizione di Z minimo:

$$Z_{min} = R$$

Affinché valga la condizione, deve essere:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

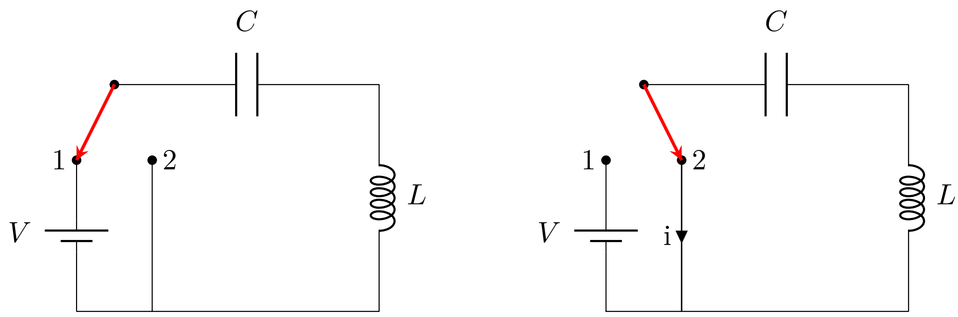
Entrambe le grandezze, termini dell'uguaglianza, dipendono dalla frequenza f (sono proporzionali, rispettivamente in modo diretto e inverso). La frequenza f_0 in cui ciò si verifica è detta **frequenza di risonanza**.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Anche per quanto riguarda le tensioni possiamo fare un ragionamento analogo a quello delle correnti:

$$V_Z = \sqrt{(V_L - V_C)^2 + {V_R}^2}$$

6 Circuito LC

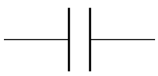
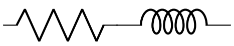
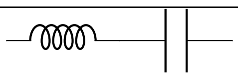
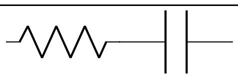
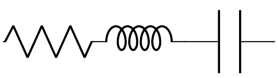


In un circuito LC è del tutto assente la componente resistiva. Caricato il condensatore con un generatore di corrente continua (o alternata, che viene disconnesso all'istante di picco di tensione dell'alternatore) ed escludendo il generatore con un commutatore, si osserva che la carica del condensatore inizia a diminuire, e scorre una corrente attraverso il circuito.

L'intensità di corrente nel tempo $i(t)$ aumenta progressivamente ma in modo sempre più lento: l'induttore genera una forza elettromotrice autoindotta che porta il condensatore a perdere la sua carica, fino a non avere alcuna differenza di potenziale ΔV tra le due armature. In condizioni ideali, non essendoci alcuna componente dissipativa, a condensatore scarico tutta l'energia inizialmente presente in esso deve essere stata trasferita nell'induttore, che fa sì che la corrente continui a scorrere, sebbene in verso opposto.

Il condensatore così si carica nuovamente, giungendo, quando la corrente si annulla, ad avere una carica positiva sull'armatura che prima era negativa e viceversa: il condensatore ha carica uguale e opposta a quella iniziale, pertanto il processo si ripete all'infinito (o, in condizioni reali, finché tutta l'energia non viene dissipata dal circuito).

7 Tabella Riassuntiva Circuiti

Simbolo Grafico	$\boldsymbol{Z}$	$\varphi = \arctan \frac{X_{L-C}}{R}$	$\overline{\mathbf{P}}$	**Tipologia Circuito**
	R	0	$R\ I^2_{eff}$	Puramente resistivo
	L	$+90°$	0	Puramente induttivo
	C	$-90°$	0	Puramente capacitivo
	$\sqrt{R^2 + {X_L}^2}$	> 0	$Z \cdot \cos\varphi\ {I_{eff}}^2$	RL
	$\|X_L - X_C\|$	$\pm 90°$	0	LC
	$\sqrt{R^2 + {X_C}^2}$	< 0	$Z \cdot \cos\varphi\ {I_{eff}}^2$	RC
	$\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$	$X_L > X_C$: $\varphi > 0$ $X_L < X_C$: $\varphi < 0$	$Z \cdot \cos\varphi\ {I_{eff}}^2$	RLC

8 Il Trasformatore

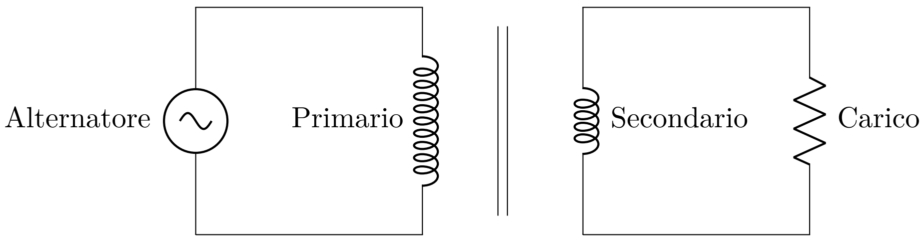
In un circuito ohmico, la potenza dissipata dai conduttori segue la legge di Joule, ossia:

$$P_d = RI^2$$

dove P_d è la potenza dissipata, R è la resistenza complessiva del conduttore e I è la corrente che scorre su di esso. In termini di resistività (ρ), R è pari a:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Dove l è la lunghezza del conduttore ed S è la superficie della sua sezione. Pertanto, la potenza dissipata (persa) cresce linearmente con la distanza attraverso cui è necessario trasportare la corrente elettrica. Siccome non posso intervenire sul conduttore, devo riuscire a diminuire la potenza dissipata riducendo la corrente che lo attraversa. Entra qui in gioco il **trasformatore**.



Il trasformatore ideale è un componente formato da una coppia di solenoidi posti su un nucleo ferromagnetico, uno dei quali, detto *primario*, è attraversato da una corrente alternata e genera pertanto una variazione del flusso magnetico $\Phi(\vec{B})$ che attraversa l'altro solenoide, il cosiddetto *secondario*. Il risultato è che il carico connesso al secondario viene attraversato da una corrente alternata maggiore o minore, ma ai capi del secondario vi è una differenza di potenziale ΔV rispettivamente minore o maggiore.

Possiamo definire V_P come la forza elettromotrice (f_{em}) che agisce sul solenoide primario. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, affermiamo che:

$$V_P = -N_P \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Dove N_P è il numero di spire dell'avvolgimento primario e $\vec{B}$ il campo magnetico da esso generato.

Al contempo, la differenza di potenziale V_S ai capi del secondario dev'essere:

$$V_S = -N_S \frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

Siccome il trasformatore che stiamo considerando è ideale, ipotizzo la sua potenza dissipata essere $P_d = 0$. Avrò pertanto che:

$$P_P = P_S$$

Nel trasformatore ideale, tutta la potenza che entra nel primario, esce dal secondario. Posso così affermare che:

$$V_S\ I_S = V_P\ I_P \rightarrow \frac{V_P}{V_S} = \frac{I_S}{I_P}$$

Il rapporto delle tensioni tra primario e secondario è inverso al rapporto delle correnti. Posso individuare due tipologie di trasformatore in base al rapporto tra il numero di spire dei due avvolgimenti e il conseguente rapporto tra le tensioni:

- Trasformatore **in discesa (riduttore)**: $V_S < V_P$
  Il secondario ha una tensione **minore**. Ciò si verifica quando il primario ha più spire del secondario, ossia $N_P > N_S$:
  $$\frac{N_P}{N_S} > 1$$
- Trasformatore **in salita (elevatore)**: $V_S > V_P$
  Il secondario ha una tensione **maggiore**. Ciò si verifica quando il primario ha meno spire del secondario, ossia $N_P < N_S$:
  $$\frac{N_P}{N_S} < 1$$

È evidente pertanto che, a pari superficie di spira, il rapporto tra le tensioni del primario e secondario è direttamente proporzionale al rapporto delle spire, e inversamente a quello tra le correnti:

$$\frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S} = \frac{I_S}{I_P}$$

Se $P_S < P_P$, il trasformatore non è ideale e bisogna considerare $P_S = V_S \cdot I_S = P_P \cdot k_{eff}$ (efficienza).