1 Derivazione

La derivata di una funzione f è la funzione f' che sistematicamente riporta la pendenza della curva associata alla funzione f. È definita come il limite del rapporto incrementale con h tendente a 0.

1.1 Rapporto incrementale

Il rapporto incrementale di una funzione è pari al suo tasso di variazione media in un intervallo di ampiezza h:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(\cancel{x} + h) - \cancel{x}}$$

La derivata della funzione f può dunque essere scritta come:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1.2 Criteri di derivabilità

Una funzione, per poter essere derivabile in un intervallo aperto (a, b) deve soddisfare le seguenti condizioni:

- Deve essere continua nell'intervallo $[a, b]$
- Non deve presentare punti di non derivabilità

Questi ultimi si classificano in base al comportamento della funzione ambo i lati:

- **Punto angoloso**: il limite del rapporto incrementale è finito ma differente sui due lati, o è finito su uno dei due e infinito sull'altro
- **Cuspide**: il limite del rapporto incrementale da sinistra e destra è infinito, e i due limiti hanno segno differente
- **Flesso a tangenza verticale**: il limite del rapporto incrementale da sinistra e destra è infinito, e i due limiti hanno lo stesso segno

2 Teorema della continuità

È dimostrabile che se una funzione f è derivabile in un punto x_0, allora la funzione è continua in x_0, ovvero:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ponendo $x = x_0 + h$, possiamo sostituire $x \to x_0$ con $h \to 0$, ossia dobbiamo dimostrare:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

Per le proprietà dei limiti, posso sottrarre una costante $f(x_0)$ nel limite e nell'altro termine dell'uguaglianza:

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$$

Moltiplico denominatore e numeratore per h:

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} h \cdot \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h}$$

Possiamo spezzare il limite, e in quanto, sia h che il secondo fattore del limite ivi sopra tendono a due valori finiti e reali (rispettivamente 0 e $f(x_0) \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{h \to 0} \frac{[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Q.E.D.

3 Derivate immediate

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
k	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{\log_a e}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

4 Operazioni con derivate

4.1 Somma di funzioni

In quanto operatore lineare, la derivata della somma di due funzioni è pari alla somma delle loro derivate:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

È triviale, del resto, dimostrare come $[kf(x)]' = kf'(x)$.

4.2 Prodotto di funzioni

Considero due funzioni f e g. Il rapporto incrementale del loro prodotto $f(x)\cdot g(x)$ ha limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

Aggiungo e sottraggo al numeratore il termine $f(x)\cdot g(x+h)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)]-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)}{h}$$

Raccolgo per $f(x)$ e $g(x+h)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]+g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)[f(x+h)-f(x)]}{h}=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

4.3 Quoziente di funzioni

È possibile rappresentare la derivata del rapporto di due funzioni come limite:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$$

Aggiungo e sottraggo al numeratore $f(x+h)\cdot g(x+h)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

Raccolgo per $f(x+h)$ e $g(x+h)$, e distribuisco $\frac{1}{h}$ così da ricostruire i rapporti incrementali:

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

4.4 Composizione di funzioni

Il limite del rapporto incrementale di $f \circ g(x)$ è:

$$[f(g(x))]' = \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}$$

Aggiungo e sottraggo $g(x)$ nell'argomento di f nel primo addendo, e moltiplico e divido per $g(x+h) - g(x)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(+g(x) + g(x+h) - g(x)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Considerando che $\lim_{h\to 0}[g(x+h) - g(x)] = 0$, posso semplificare:

$$f'(\,g(x)\,) \cdot g'(x)$$

4.5 Inversione di funzioni

Se voglio determinare la derivata prima di una funzione $g(x) = f^{-1}(x)$, devo prima accertarmi che $y = f(x)$ soddisfi i seguenti requisiti:

1. f è continua
2. f è invertibile in un intervallo I

È possibile scrivere la seguente identità:

$$g(\,f(x)\,) = x$$

Derivando entrambi i membri, otteniamo:

$$g'(\,f(x)\,) \cdot f'(x) = 1$$

Essendo $y = f(x)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

4.6 Tabella riassuntiva

Addizione	$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$
Moltiplicazione	$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Quoziente	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Composizione	$f \circ g(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Inversione	$f^{-1\prime}(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

5 Teorema di Fermat

Data una funzione f definita in un intervallo $[a,b]$, e un punto $c \in (a,b)$ di massimo o di minimo relativo in cui f è derivabile, $f'(c)=0$.

5.1 Ipotesi

- $\exists f$ in $[a,b]$
- $\exists f'(c)$
- $c \in (a,b)$ è un estremante

5.2 Tesi

$f'(c)=0$

5.3 Dimostrazione

Considero il caso in cui c è un punto di minimo, per definizione:

$$\exists I(c) : \forall x \in I(c), f(x) \geq f(c)$$

$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0$$

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)-f(c-h)}{h} \leq 0$$

Per ipotesi in c la funzione è derivabile: $f'_+(c) = f'_-(c)$, pertanto $f'(c)$ deve valere proprio 0.

6 Teorema di Rolle

Data una funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile in un intervallo aperto (a, b), tale che $f(a) = f(b)$, esiste un punto c all'interno dell'intervallo tale che $f'(c) = 0$.

6.1 Ipotesi

- f è continua in $[a, b]$
- f è derivabile in (a, b)
- $f(a) = f(b)$

6.2 Tesi

$\exists\ c \in (a, b) : f'(c) = 0$

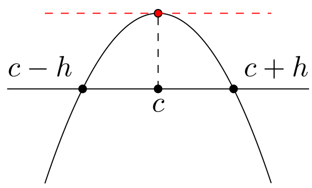
6.3 Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass, esiste un punto di massimo e minimo in una funzione, pertanto vi sono due casi:

- Se a è il punto di massimo, e b quello di minimo (o viceversa), siccome per Ipt. $f(a) = f(b)$, la funzione è una retta parallela all'asse x, per cui $f'(c) = 0$ per qualunque c in $[a, b]$.
- Esiste un estremante c all'interno di (a, b); ipotizzando ad esempio che sia un massimo relativo, $\exists I(c) : \forall x \in I(c), f(c) \geq f(x)$.

Ipotizzando h l'ampiezza dell'intorno, avremo:

- $\dfrac{f(c) - f(c-h)}{h} \geq 0$
- $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$



Da qui concludiamo che $f(c) = 0$ **Q.E.D.**

7 Teorema di Lagrange

Se una funzione f è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b), allora esiste almeno un punto c in (a, b) tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ossia esiste un punto in cui il tasso di variazione istantanea è pari al tasso di variazione media nell'intervallo.

7.1 Ipotesi

- f è continua in $[a, b]$
- $\exists f'(x_0) \forall x_0 \in (a, b)$

7.2 Tesi

$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

7.3 Dimostrazione

Definisco una funzione g come differenza tra f e la funzione associata alla retta passante per i due punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$:

$$g(x) = y = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Osservo che g soddisfa le condizioni del Th. di Rolle rispetto all'intervallo compreso tra a e b in quanto:

1. è continua in $[a, b]$ come differenza di funzioni continue
2. è derivabile in (a, b) come differenza di funzioni derivabili
3. vale 0 agli estremi dell'intervallo

Esiste pertanto almeno un punto $c \in (a, b) : f'(c) = 0$. D'altro canto, dalla definizione di g ho che la sua derivata, vista come pendenza della curva è:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sapendo che $g'(c) = 0$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Q.E.D.

8 Teorema di Cauchy

Avendo due funzioni f e g continue nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabili nell'intervallo aperto (a, b), allora:

1. esiste un punto $c \in (a, b)$ (a.k.a. Pto. di Cauchy), tale che:

$$[g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$$

2. se $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

8.1 Ipotesi

- f e g sono continue in $[a, b]$
- $\exists\, f'(x),\ g'(x)\ \forall x \in (a, b)$

8.2 Tesi

$\exists c \in (a, b) : [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$

Se è vero che $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \rightarrow \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

8.3 Dimostrazione

Considero la funzione h tale che:

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

h è dunque:

- continua in $[a, b]$ in quanto somma di funzioni che soddisfano questo criterio
- derivabile in (a, b) per la stessa ragione

Osservo che $h(a) = h(b)$, in quanto:
$h(a) = [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) =$
$= \qquad f(a)g(b) \cancel{-f(a)g(a)} - f(b)g(a) \cancel{+f(a)g(a)}$

$h(a) = [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) =$
$= \qquad \cancel{f(b)g(b)} - f(b)g(a) \cancel{-g(b)f(b)} + f(a)g(b)$

È così dimostrato che la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in [a,b], e che pertanto:

$$\exists c \in (a, b) :$$
$$h'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) - [f(b) - f(a)]g'(c) = 0$$

Q.E.D.

Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, deve essere che $g(b) \neq g(a)$: se così non fosse, per il teorema di Rolle applicato a g nell'intervallo $[a, b]$ dovrebbe esistere almeno un estremante, in contraddizione con quanto ipotizzato. È così constatabile che:

$$[g(b) - g(a)]g'(c) \neq 0$$

È dunque possibile dividere entrambi i termini della prima tesi per $[f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$, ottenendo:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Q.E.D.

9 Teorema di de l'Hôpital

Se f e g sono due funzioni derivabili in un intorno $I(x_0)$, tranne al più in x_0, con $x_0 \in \mathbb{R}$, e sono verificate le ipotesi:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, oppure $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$
2. $g'(x) \neq 0, \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$
3. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Questo teorema consente di uscire dalle forme di indeterminazione:

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Per indicare che sto applicando il teorema appongo una H sopra al simbolo di uguale.

9.1 Ipotesi

1. $\exists\ f'(x);\ g'(x),\ \forall x \in I(x_0)$ con $x \neq x_0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure entrambi i limiti sono $\pm\infty$
3. $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$
4. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

9.2 Tesi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

9.3 Dimostrazione

Sappiamo che in:

- $[x_0, x]$: f, g sono continue
- (x_0, x): f, g sono derivabili
- $\forall x \in (x_0, x) : g'(x) \neq 0$

Applicando il teorema di Cauchy:

$$\exists c \in (x_0, x) : \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

c è compreso tra x e x_0, ma se x tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Q.E.D.

10 Criteri per la monotonia

10.1 Ipotesi e Tesi

f è continua e derivabile in I e $f'(x) > 0$ $\forall x \in I \to f$ è crescente **strettamente** in I
f è continua e derivabile in I e $f'(x) < 0$ $\forall x \in I \to f$ è decrescente **strettamente** in I

10.2 Dimostrazione

Prendo $x_1, x_2 \in I$ affinché $x_1 < x_2$.
f è continua e derivabile in $[x_1, x_2] \subseteq I$

Per il Th. di Lagrange, $\exists c : f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$

Questo valore è strettamente maggiore di 0 se e solo se $f(x_2) > f(x_1)$, ossia f è strettamente crescente. Altrimenti, f è strettamente decrescente **Q.E.D.**

10.3 Th. "inverso"

Se f è crescente e derivabile in I e f è strettamente crescente/decrescente nell'intervallo:
$f'(x) \geq 0$ / $f'(x) \leq 0$

10.4 Stabilire massimi e minimi attraverso la derivata I

Assumo f continua in $I(x_0)$ e derivabile tranne al più in x_0.
Se in $I(x_0)$ ho che:

1. $f'(x) < 0, \forall < x_0$ e $f'(x) > 0$ $\forall x > x_0$: x_0 è un punto di minimo
2. $f'(x) > 0, \forall < x_0$ e $f'(x) < 0$ $\forall x > x_0$: x_0 è un punto di massimo
3. se $f'(x) > 0, \forall x \in I(x_0) \vee f'(x) < 0, \forall x \in I(x_0) \Rightarrow x_0$ non è un estremante

11 Stabilire massimi e minimi attraverso la derivata II

11.1 Ipotesi

- f continua in $I(x_0)$, derivabile almeno due volte in x_0
- $f'(x_0) = 0$

11.2 Tesi

1. Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ **è un punto di massimo**
2. Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ **è un punto di minimo**
3. Se $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ **non ottengo alcuna informazione su** x_0

11.3 Dimostrazione

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{h}$$

$f'(x_0) = 0$ per ipotesi

Per il teorema della permanenza del segno:

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0$$

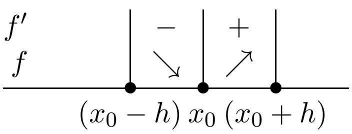
f è derivabile due volte per ipotesi, pertanto:

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - h)}{h} = f''(x_0)$$

Per ipotesi, $f''(x_0) > 0$

Per il teorema della permanenza del segno:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x) - f'(x_0 - h)}{h} > 0$$



x_0 è un punto di minimo **Q.E.D.**
Il medesimo ragionamento può essere applicato per i punti di massimo

12 Teorema Inverso

12.1 Ipotesi

x_0 è un punto di massimo

12.2 Tesi

$f''(x_0) < 0$

12.3 Dimostrazione

x_0 è un punto di massimo per ipotesi:
$\Rightarrow \exists I(x_0) \forall x \in I(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$

$$\begin{array}{c|c|c} f' & + & - \\ f & \nearrow & \searrow \\ \hline & & \\[-8pt] \multicolumn{3}{c}{\quad\quad x_0} \end{array}$$

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0) - f'(x_0 - h)}{h} > 0$$

$\Rightarrow f''(x_0) > 0$ **Q.E.D.**

13 Concavità e Convessità

In un punto x_0 la funzione ha la concavità rivolta verso l'alto se esiste un intorno $I(x_0)$ tale che per ogni x appartenente all'intorno (escluso x_0) il valore della funzione è maggiore del valore dell'ordinata della tangente in quel punto:

$$\exists\ I(x_0) : \forall x \in (I(x_0) - \{x_0\}) \quad f(x) > t(x)$$

Allo stesso modo, se la concavità è rivolta verso il basso:

$$\exists\ I(x_0) : \forall x \in (I(x_0) - \{x_0\}) \quad f(x) < t(x)$$

I **punti di flesso** sono punti in corrispondenza dei quali avviene un cambio di concavità. Alcuni flessi (flesso a tangenza verticale) non sono punti in cui la funzione è derivabile.

I punti di flesso sono divisi in:

- a tangenza orizzontale $(y'(x) = 0)$
- a tangenza obliqua $(y'(x_0) \neq 0)$
- a tangenza verticale $(\nexists y'(x_0))$

14 Teorema: criteri per determinare la concavità di una funzione con la derivata II

14.1 Ipotesi e tesi

Se f è continua e derivabile almeno due volte in x_0:

- se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ avrà la concavità rivolta verso l'alto nell'intorno di x_0
- se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ avrà la concavità rivolta verso il basso nell'intorno di x_0

14.2 Dimostrazione

Scrivo la retta tangente $t(x)$ come:

$$t(x) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Definisco la funzione $F(x)$

$$F(x) = f(x) - t(x)$$

In quanto differenza di funzioni continue e derivabile, $F(x)$ è anch'essa continua e derivabile. Derivo $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x) - t'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

poiché $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Derivo nuovamente $F'(x)$:

$$F''(x) = f''(x)$$

$$F''(x_0) = f''(x_0) > 0 \rightarrow F''(x_0) > 0$$

Studiando il segno:

$F''(x)$	$+$	$+$
$F'(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$
	x_0	

Osservo che F' è crescente: $x < x_0 \rightarrow F'(x) < F'(x_0) \quad \wedge \quad x_0 < x \rightarrow F'(x_0) < F'(x)$.

$F'(x)$	$-$	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$\nearrow$
	x_0	

x_0 è pertanto un punto di minimo per $F(x)$:

$$\exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \ F(x) > F(x_0)$$

$F(x)$ è strettamente maggiore di zero:

$$F(x) > 0$$

Ossia, $f(x)$ è sempre maggiore della tangente $t(x)$ **Q.E.D.**

È possibile applicare questa dimostrazione anche alla circostanza in cui $f''(x) < 0$. Riassumendo, posso studiare la concavità di una funzione mediante il segno della sua derivata seconda:

- $y'' > 0 \rightarrow$ concavità rivolta verso l'alto
- $y'' < 0 \rightarrow$ concavità rivolta verso il basso
- $y''(x_0) = 0 \rightarrow$ cambio di concavità (flesso)